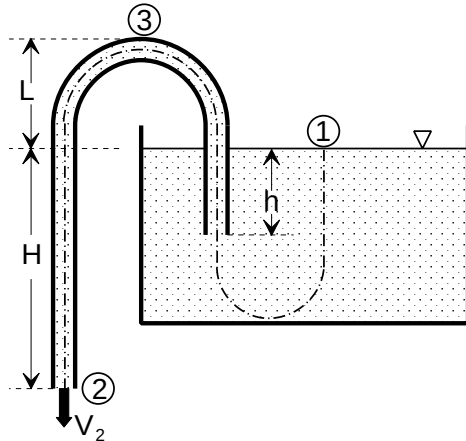


Løsning øving 6

Oppgave 3.169

Vis at a) $V_{ut} = V_{ut}(g, H)$ og b) $p_3 = p_{min}$ er avhengig av $L + H$.



a) Bernoulli langs en strømlinje fra 1 til 2:

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2$$

På væskeoverflaten har vi at $V_1 \approx 0$ (stort kar), og videre er $p_1 = p_2 = p_a$:

$$gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \Rightarrow V_2^2 = 2g(z_1 - z_2)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V_2 = \sqrt{2gH}}}$$

b) Bernoulli langs strømlinje fra 2 til 3:

$$\frac{V_2^2}{2} + \frac{p_a}{\rho} + gz_2 = \frac{V_3^2}{2} + \frac{p_3}{\rho} + gz_3$$

Massebevarelse: $A_{rør} V_2 = A_{rør} V_3 \Rightarrow V_2 = V_3$ som innsatt gir:

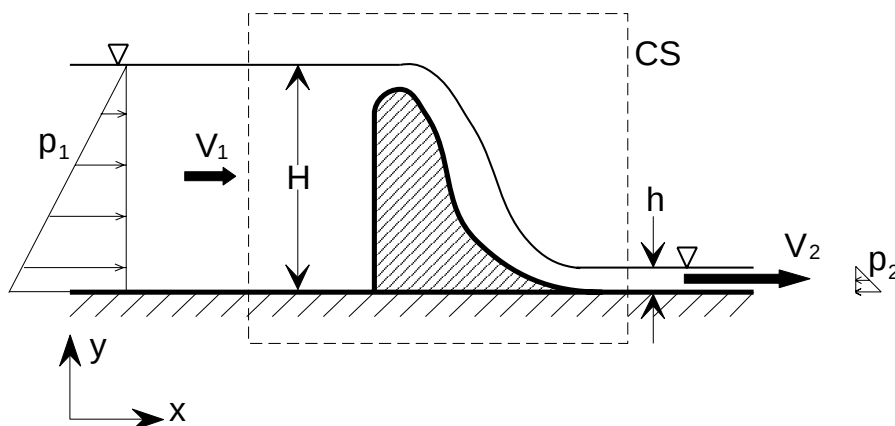
$$p_3 = p_a - \rho g(z_3 - z_2)$$

Det laveste trykket p_3 får vi der høydeforskjellen $z_3 - z_2$ er størst, altså:

$$\underline{\underline{p_{min} = p_a - \rho g(L + H)}}$$

Oppgave 3.176

Finn a) V_2 i m/s og b) Kraft pr. lengdeenhet på demningen.



Hydrostatisk ved snitt 1 og 2 vil si at trykket varierer lineært.

Tallverdier:

$$H = 5.0 \text{ m}$$

$$h = 0.7 \text{ m}$$

Massebevarelse:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

↓

$$V_1 = V_2 \frac{h}{H}$$

a) Bernoulli langs en strømlinje fra tverrsnitt 1 til 2 (legger strømlinje langs overflaten der trykket er kjent lik p_a):

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_a}{\rho} + gH = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_a}{\rho} + gh$$

Setter inn for V_1 og ordner:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2g(H-h)}{1 - (\frac{h}{H})^2}} = \underline{\underline{9.276 \text{ m/s}}}$$

- b) Legger et kontrollvolum rundt demningen som vist på figuren. På dette kontrollvolumet virker det en ukjent kraft F i x-retning. Impulssatsen:

$$\Sigma F_x = F + \text{trykk}_1 \cdot H - \text{trykk}_2 \cdot h = \rho V_1(-V_1)H + \rho V_2(V_2)h$$

$$\text{der } \text{trykk}_1 = \frac{1}{2}\rho gH \quad \text{og} \quad \text{trykk}_2 = \frac{1}{2}\rho gh. \quad \text{Innsatt:}$$

$$\underline{\underline{F = \frac{1}{2}\rho g(-H^2 + h^2) + \rho(-V_1^2 H + V_2^2 h)}}$$

Fra massebevarelse: $V_1 = V_2 h / H = 1.30 \text{ m/s}$

Tallverdi: $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$ og $\rho g = 9790 \text{ N/m}^3$ gir $F = -68300 \text{ N}$.

Her er F kraften fra omgivelsene (demningen) på vannet inne i kontrollvolumet. Vi vil ha motkraften, altså:

Kraft på demningen = 68300 N

Oppgave 4.5 a) Vis at akselerasjonen er radielt rettet

b) Finn U_0 i $(x,y) = (1\text{m}, 1\text{m})$ når $L = 1.5\text{m}$ og akselerasjonen der er 25m/s^2 .

$$\text{Gitt: } u = U_0 \frac{x}{L} \quad \text{og} \quad v = -U_0 \frac{y}{L}$$

a) Akselerasjonen finnes fra den substansielt deriverte:

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 + U_0 \frac{x}{L} \cdot \frac{U_0}{L} + 0$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 + 0 + (-U_0 \frac{y}{L}) \cdot (-\frac{U_0}{L})$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{a} = \frac{U_0^2}{L^2}(x,y) = \frac{U_0^2}{L^2} \cdot \vec{r}}} \quad \text{dvs kun i radiell retning}$$

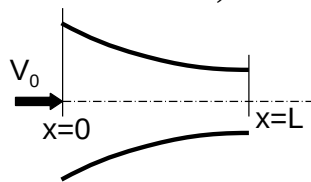
b) Akslerasjon i punktet ($x = 1 \text{ m}$, $y = 1 \text{ m}$):

$$|\vec{a}| = \frac{U_0^2}{L^2} |\vec{r}| = \frac{U_0^2}{L^2} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{U_0^2}{L^2} \sqrt{2} = 25 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{U_0 = 6.3 \text{ m/s}}}$$

Oppgave 4.6 a) Finn akselerasjonen ved $x = L$

b) Tiden for en partikkel å bevege seg fra $x = 0$ til $x = L$.



Hastighetsfeltet er gitt ved

$$u = V_0 \left(1 + 2\frac{x}{L}\right) \quad v = w = 0$$

Akselerasjonen (her kun i x-retning):

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u \frac{du}{dx} = V_0 \left(1 + 2\frac{x}{L}\right) \cdot \frac{V_0}{L}$$

$$\underline{\underline{a_x|_{x=L} = 6 \frac{V_0^2}{L}}}$$

La x være posisjonen til en partikkel som følger passivt med strømmen. Da har vi at

$$\text{Hastigeten } u = \frac{dx}{dt} = V_0 \left(1 + 2\frac{x}{L}\right)$$

$$\text{Integrerer: } V_0 t = \int_0^L \frac{dx}{1 + 2x/L} = \left[L \cdot \ln\left(1 + 2\frac{x}{L}\right) \right]_0^L \Rightarrow \underline{\underline{t = L \cdot \ln(3)/2V_0}}$$