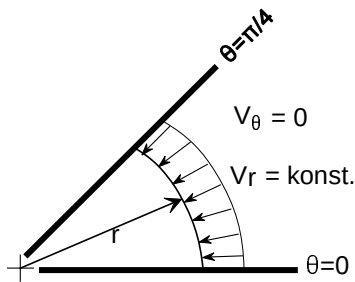


Løsning øving 8

Oppgave 4.52 Finn strømfunksjonen ψ i polar-koordinater.



Gitt volumstrømmen Q inn mot origo. Strømningen er inkompressibel, to-dimensjonal og friksjonsfri. Bredden inn i papir-planet er b .

Hastighetskomponentene:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Her er $v_\theta = 0$ og $v_r = \text{konstant} < 0$.

Massebevarelse:

$$Q = -v_r \cdot \text{Areal} = -v_r \cdot \frac{\pi}{4} r \cdot b \Rightarrow \underline{v_r = -\frac{4Q}{\pi r b}}$$

Strømfunksjonen ψ eksisterer kun hvis kontinuitetslikningen bare har to ledd:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{Her:} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

Kontinuitetslikningen er oppfylt, og har kun to ledd (v_r og v_θ).

Integrerer opp r -komponenten:

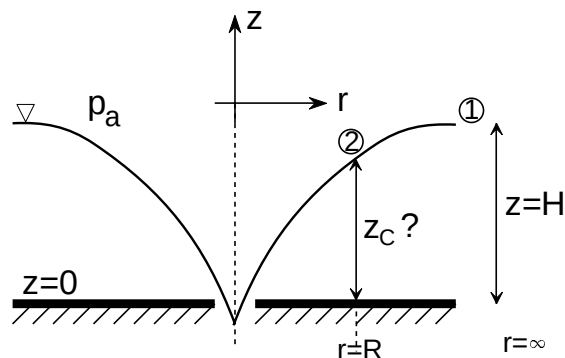
$$\psi = \int r \cdot v_r d\theta = -\frac{4Q}{\pi b} \theta + f(r)$$

Setter ψ inn i uttrykket for v_θ (som vi vet er null):

$$0 = v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{df}{dr} \Rightarrow f(r) = \text{konstant} = C$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\psi = -\frac{4Q}{\pi b} \theta + C}} \quad \text{Dette er et linjesluk}$$

Oppgave 4.60 Undersøk om strømmingen er rotasjonsfri (virvlingsfri), og bestem dybden z_C ved $r = R$.



Gitt hastighetsfeltet

$$\vec{v} = (v_r, v_\theta, v_z) = (0, \frac{\omega R^2}{r}, 0)$$

Strømmingen er rotasjonsfri hvis $\nabla \times \vec{v} = 0$.

Her har vi kun en hastighetskomponent v_θ som kun varierer i r-retning.

I det generelle uttrykket

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}, \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)$$

blir her samtlige ledd lik null, altså er strømmingen rotasjonsfri (virvlingsfri).

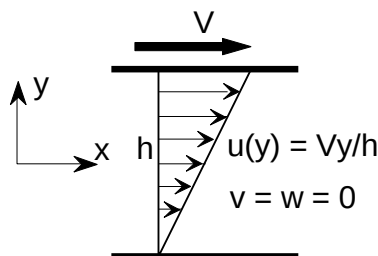
Skal finne dybden z_C . Bruker Bernoulli's likning fra 1 til 2 langs den fri overflaten:

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{1}{2} V_{r=R}^2 + g z_C = \frac{p_a}{\rho} + \frac{1}{2} V_{r=\infty}^2 + g H$$

Her er $V_{r=R} = v_\theta = \omega R$ og $V_{r=\infty} = 0$:

$$\Rightarrow \underline{\underline{z_C = H - \frac{\omega^2 R^2}{2g}}}$$

Oppgave 4.62 Vis at den lineære Couette-strømmingen har en strømfunksjon, men ikke hastighetspotensial.



Betingelse for strømfunksjonen: 2-dimensjonal strømning. Her har vi kun $u(y)$, dvs. kun strømning i xy-planet.

Kontinuitetslikningen:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{OK.}$$

altså eksisterer strømfunksjonen. Finner ψ fra definisjonen:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Rightarrow \psi = \int u dy = \frac{V}{2h} y^2 + f(x)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow \psi = -\int v dx = 0 + g(y)$$

Begge disse uttrykkene skal være riktige, altså:

$$\underline{\underline{\psi = \frac{V}{2h} y^2 + C}}$$

Betingelse for hastighetspotensialet: Virvlingsfri strømming, $\nabla \times \vec{v} = 0$. Kartesisk:

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Her kan vi kun få bidrag fra det siste leddet (strømming i xy-planet), altså z-komponenten:

$$(\nabla \times \vec{v})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{du}{dy} = -\frac{V}{h} \neq 0$$

Hastighetspotensialet kan ikke eksistere!

Oppgave 4.65 Undersøk om strømmingen er rotasjonsfri. Finn i så fall hastighetspotensialet og lag en skisse av strømmingen.

Gitt hastighetskomponentene

$$u = -\frac{Ky}{x^2 + y^2} \quad v = \frac{Kx}{x^2 + y^2}$$

Betingelse for hastighetspotensialet: Virvlingsfri (rotasjonsfri) strømming, $\nabla \times \vec{v} = 0$.

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Her kan vi kun få bidrag fra det siste leddet (strømming i xy-planet), altså z-komponenten:

$$(\nabla \times \vec{v})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{K(x^2 + y^2) - Kx \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-K(x^2 + y^2) + Ky \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Strømmingen er virvlingsfri, og vi finner hastighetspotensialet fra definisjonen:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow \phi = \int u dx = \int -\frac{Ky}{x^2 + y^2} dx = K \cdot \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + f(y)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow \phi = \int v dy = \int \frac{Kx}{x^2 + y^2} dy = K \cdot \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + g(x)$$

Ved første øyekast ser det ikke ut til å være mulig at begge disse uttrykkene skal være riktige, men ved hjelp av sammenhengen

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

får vi at

$$\phi = K \cdot \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + C \Rightarrow \underline{\underline{\phi = K \cdot \theta + C}}$$

Skisse: (har valgt $C = 0$)

