LØSNING TEP 4110 FLUIDMEKANIKK DES. 2003

<u>Oppgave 1a</u> $\psi = \underbrace{Ar\sin\theta}_{\substack{\text{Uniform strøm} \\ \text{i x-retning}}} + \underbrace{B\frac{\sin\theta}{r}}_{\text{Dublett}}$

Fordi strømfunksjonen er sammensatt av kjente elementærstrømninger, vet vi at også den kombinerte strømningen er virvlingsfri, dvs. $\nabla \times \vec{v} = 0$. Dimensjoner:

$\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] = [\text{Hastighet}] \Rightarrow \underline{[\psi] = m^2/s}$, $\underline{[A] = m/s}$, $\underline{[B] = m^3/s}$

b) B er negativ: $\psi = Ar\sin\theta - B\frac{\sin\theta}{r}$

$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = A\cos\theta - B\frac{\cos\theta}{r^2} = 0$ for $A = \frac{B}{r^2} \Rightarrow \underline{r = \sqrt{\frac{B}{A}}}$

$v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -A\sin\theta - B\frac{\sin\theta}{r^2} = 0$ for $\underline{\theta = 0}$ og $\underline{\theta = \pi}$

$\Rightarrow$ Stagnasjonspunkt $(0, \sqrt{B/A})$ og $(\pi, \sqrt{B/A})$.

Strømlinja: $\psi_s = 0 = (Ar - B/r)\sin\theta \Rightarrow \underline{r = \sqrt{\frac{B}{A}} = \text{konstant}}$

ↄ: Sirkel

c) B er positiv: $\psi = Ar\sin\theta + B\frac{\sin\theta}{r}$

$v_r = A\cos\theta + B\frac{\cos\theta}{r^2} = 0$ for $\underline{\theta = \frac{\pi}{2}}$, og $\underline{\theta = \frac{3\pi}{2}}$

$v_\theta = -A\sin\theta + B\frac{\sin\theta}{r^2} = 0$ for $\underline{r = \sqrt{B/A}}$

$\Rightarrow$ Stagnasjonspunkt $(\frac{\pi}{2}, \sqrt{B/A})$ og $(\frac{3\pi}{2}, \sqrt{B/A})$

d) $\psi_s = \psi(\theta = \frac{\pi}{2}, r = \sqrt{B/A}) = A \cdot \sqrt{\frac{B}{A}} + B\sqrt{\frac{A}{B}} = 2\sqrt{AB}$

Likningen for strømlinja blir $\psi = \psi_s$

$\Rightarrow \underline{Ar\sin\theta + B\frac{\sin\theta}{r} = 2\sqrt{AB}}$

Omskriver for å finne høyden Y:

$$Y = r\sin\theta = \left[2\sqrt{AB} - B\frac{\sin\theta}{r}\right]/A$$

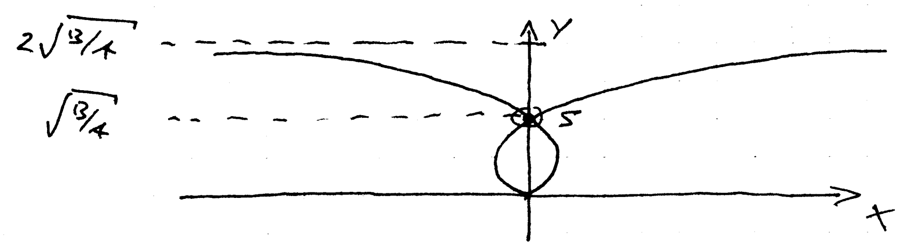
$$Y_{max} = \lim_{\substack{r\to\infty \\ \theta\to 0 \text{ eller } \pi}} Y = \frac{2\sqrt{AB}}{A} = \underline{2\sqrt{B/A}}$$

Alternativ omskrivning: $2\sqrt{AB} = A\cdot Y + B\frac{\sin^2\theta}{Y}$

$$\Rightarrow Y^2 - 2\sqrt{B/A}\cdot Y + \frac{B}{A}\sin^2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{Y = \sqrt{\frac{B}{A}}(1 \pm \cos\theta)}$$

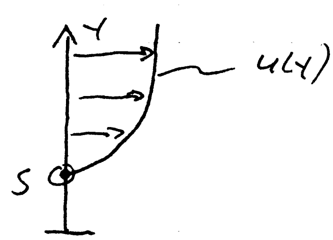
$\theta \to 0$: $Y_{max} \Rightarrow \sqrt{\frac{B}{A}}(1+1)$

$\theta \to \pi$: $Y_{max} = \sqrt{\frac{B}{A}}(1-(-1))$



e) Langs Y-aksen: $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v_r = 0$ og $\underline{v_\theta = -A + \frac{B}{Y^2}}$

Langs den positive Y-aksen går v_θ i negativ x-retning, så vi kan skrive $u = -v_\theta = A - B/Y^2$.



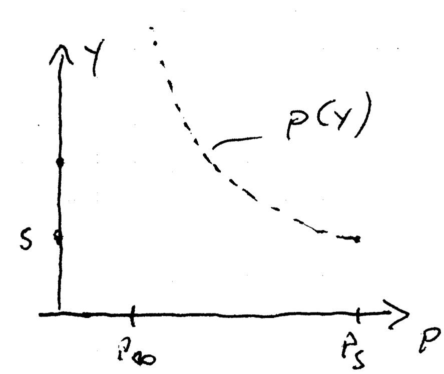
Trykket kan vi finne fra Bernoulli fordi vi vet at strømningen er virvlingsfri, Bernoulli fra ∞ til Y:

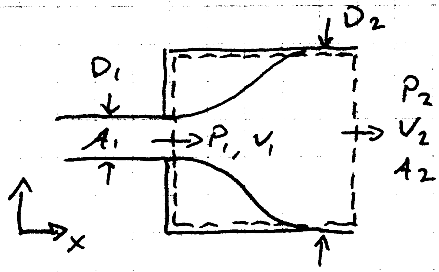
$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{A^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{v_\theta^2}{2} \Rightarrow p(Y) = p_\infty + \frac{1}{2}\rho\left(A^2 - \left(-A + \frac{B}{Y^2}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \underline{p(Y) = p_\infty + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{2AB}{Y^2} - \frac{B^2}{Y^4}\right)}$$

$$p_S = p\left(Y = \sqrt{\frac{B}{A}}\right) = p_\infty + \frac{1}{2}\rho A^2$$

$$p\left(Y = 2\sqrt{\frac{B}{A}}\right) = p_\infty + \frac{1}{2}\rho A^2 \cdot \frac{7}{16}$$





Oppgave 2 a)

Massebevarelse:

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$$

Kraftloven i x-retning: $\Sigma F_x = P_1 A_2 - P_2 A_2 = -\rho V_1^2 A_1 + \rho V_2^2 A_2$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = -\rho V_1^2 \frac{A_1}{A_2} + \rho V_1^2 \frac{A_1^2}{A_2^2} \Rightarrow \underline{P_2 = P_1 + \rho V_1^2 \frac{A_1}{A_2}\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)}$$

b) Bernoulli m/utvidelsestap fra 1 til 2 (Turbulent $\Rightarrow \alpha = 1$)

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_m \Rightarrow h_m = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} + \frac{V_1^2 - V_1^2 (A_1/A_2)^2}{2g}$$

$$\Rightarrow h_m = \frac{1}{g}\left[V_1^2 \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{A_1}{A_2} - 1\right) + \frac{1}{2} V_1^2 \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right)\right]$$

$$= \frac{V_1^2}{2g}\left[2\frac{A_1^2}{A_2^2} - 2\frac{A_1}{A_2} + 1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right] = \frac{V_1^2}{2g}\left[\frac{A_1^2}{A_2^2} - 2\frac{A_1}{A_2} + 1\right]$$

$$= \frac{V_1^2}{2g}\left[\frac{A_1}{A_2} - 1\right]^2 = \underline{\underline{\frac{V_1^2}{2g}\left[\frac{d^2}{D^2} - 1\right]^2}} \quad D \gg d \Rightarrow \underline{\underline{h_m = \frac{V_1^2}{2g}}}$$

c) $Q = 10\ l/s = 0.01\ m^3/s = V_1 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \Rightarrow V_1 = \frac{4Q}{\pi d^2} = \underline{\frac{4}{\pi}\ m/s}$

$$Re_d = \frac{V_1 d}{\nu} = \frac{\frac{4}{\pi}\frac{m}{s} \cdot 0.1\,m}{10^{-6}\ m^2/s} = \frac{4}{\pi}\cdot 10^5 > 2300 \Rightarrow \underline{\text{Turbulent.}}$$

d) Bernoulli fra pumpa til overflaten:

$$\frac{P_p}{\rho g} + \alpha \frac{V_1^2}{2g} + 0 = \frac{P_a}{\rho g} + 0 + gH + h_m \Rightarrow P_p = P_a - \frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g H + \underbrace{h_m \rho g}_{= \rho \frac{V_1^2}{2}}$$

$$\Rightarrow P_p = P_a + \rho g H = 101\ kPa + 1000 \cdot 10 \cdot 2 = \underline{\underline{121\ kPa}}$$

e) $$h_f = \frac{V_1^2}{2g} \cdot \frac{0.316}{\left(\frac{V_1 d}{\nu}\right)^{1/4}} \cdot \frac{L}{d} = 0.0136\,L$$

1% av H = 2 cm = 0.02 m $\overset{!}{=}$ 0.0136 · L

$\Rightarrow \underline{\underline{L = 1.48\ m}}$

Oppgave 3

- Inkompressibelt fluid $\Rightarrow$ $\rho = \text{konst.}$
- Viskøst fluid $\Rightarrow$ $\mu \neq 0$
- Stasjonær strømning $\Rightarrow$ $\partial / \partial t = 0$ I
- Kun x-hastighet $\Rightarrow$ $\vec{V} = (u, 0)$ II
- Laminær strømning

a) Bestemmer trykket p(x,y).

Kontinuitetslikning: $\nabla \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

Men $v = 0$, slik at $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{u = u(y)}$ III

Navier-Stokes: $$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{V}$$ Dekomponerer:

x-komponent: $$\underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}}_{\mathrm{I}} + u\underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}}_{\mathrm{III}} + \underbrace{\cancel{v}}_{\mathrm{II}}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}}_{\mathrm{III}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

y-komponent: $$\underbrace{\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}}}_{\mathrm{I}} + u\underbrace{\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\cancel{v}}_{\mathrm{II}}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - g + \nu\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}}_{\mathrm{II}}\right)$$

Navier-Stokes reduseres dermed til:

x-komponent: $\dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho\nu\dfrac{d^2 u}{dy^2} = \mu\dfrac{d^2 u}{dy^2}$

y-komponent: $\dfrac{\partial p}{\partial y} = -\rho g$

Deriverer begge disse mhp. strømretningen x for å frikoble trykket:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right) = \mu\frac{d^2}{dy^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \text{ pga. III}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0$$ fordi ρg er konstant. Har byttet derivasjonsrekkefølgen her for

å vise at $\dfrac{\partial p}{\partial x} = \text{konst.}$ Det gir: $p = Cx + f(y)$ der C er en konstant.

Fra y-komponenten: $p = -\rho g y + g(x) \quad \Rightarrow \quad p(x,y) = Cx - \rho g y + K$

Grensebetingelse: $p(0,0) = p_0 \quad \Rightarrow \quad K = p_0$

Får da: $p(x,y) = p_0 + Cx - \rho g y$, dvs. statisk trykkvariasjon i y-retning og lineær variasjon i x-retning. Men trykket skal være symmetrisk om y-aksen; p(x,y) = p(-x,y), slik at $C = 0$.

Det gir: $\underline{\underline{p(y) = p_0 - \rho g y}}$

b) <u>Fluidens hastighet</u>

Fra x-komponenten av Navier-Stokes: $\dfrac{d^2u}{dy^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{dy} = C_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{u = C_1 y + C_2}$

Grensebetingelser:

$u = V_B \quad \text{for} \quad y = R \quad \Rightarrow \quad C_1 R + C_2 = V_B$

$u = -V_B \quad \text{for} \quad y = -R \quad \Rightarrow \quad -C_1 R + C_2 = -V_B$

Dette gir $C_1 = \dfrac{V_B}{R}$ og $C_2 = 0$, slik at: $\underline{\underline{u(y) = V_B \dfrac{y}{R}}}$

c) <u>Krefter som virker på fluid</u>

Høyresiden i kraftloven blir null i denne oppgaven, fordi vi har ikke aksellerasjon. (Enkelt å vise dette, men ikke nødvendig.) Dermed blir kraftloven her $\sum \vec{F} = 0$. Dekomponerer:

$$\sum F_x = p_0 \cdot 2RB - p_0 \cdot 2RB + |\tau_w| LB - |\tau_w| LB = 0$$

$$\sum F_y = (p_0 + \rho g R) \cdot LB - (p_0 - \rho g R) \cdot LB - mg = 0 \quad \text{der} \quad m = \rho V = \rho \cdot 2RLB$$

<u>Krefter som virker på beltet</u>

$F_x = |\tau_w| \cdot LB$ Friksjonskraft mot bevegelsen

$F_y = (p_0 - \rho g R) \cdot LB$ Kraft opp mot øvre belte

$F_y = (p_0 + \rho g R) \cdot LB$ Kraft ned mot nedre belte

d) <u>Strømfunksjon</u>

Todimensjonal og stasjonær strømning. Vet fra a) at $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ og at $\vec{V} = \langle u(y), 0 \rangle$

Altså, strømfunksjon ψ eksisterer.

$$u = \frac{V_B y}{R} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \psi = \frac{V_B y^2}{2R} + f(x)$$

$$v = 0 = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \psi = g(y)$$

sammenligning gir $\underline{\underline{\psi = \dfrac{V_B y^2}{2R}}}$

e) Krav for å innføre <u>hastighetspotensial</u>: Rotasjonsfri strømning $\nabla \times \vec{V} = 0$.

Her: $(\nabla \times \vec{V})_z = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = \underline{-\dfrac{V_B}{R}} \neq 0$ Hastighetspotensialet eksisterer ikke!