LØSNINGSFORSLAG, Kyb2 / Estimering – 5/12/02

Oppgave 1 (25 %)

a) $$h(z) = \frac{p_1}{z^{11} + p_2 \cdot z^{10}} = \frac{p_1}{z + p_2} z^{-10}$$

➔ Differenslikning : $y(k) = -p_2\, y(k-1) + p_1\, u(k-11)$

b) Med parametervektor $P = [\ p_1 \ \ p_2\ ]^T$ blir regresjonsvektor $\varphi = [\ u(k-11) \ \ -y(k-1)\ ]^T$

Vi har 20 x 1/0.01 + 1 = 2001 samples : u(1), u(2), … u(2001) og y(1), y(2), .. y(2001)
Skrives datasettet på formen Y = Φ P , må :

$$Y = \begin{bmatrix} y(12) \\ \vdots \\ y(2001) \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \Phi = \begin{bmatrix} u(1) & -y(11) \\ \vdots & \vdots \\ u(1990) & -y(2000) \end{bmatrix}$$

c) Tapsfunksjonen $V = E^T E$ = Sum av kvadratisk avvik. Gir et mål for hvor gode estimatene er . Jo mindre V, dess bedre estimater.

d) Autokovariansfunksjonen til E = $R_e(\tau) = E[e(k)e(k-\tau)]$ der τ er antall tidsskritt mellom samples. For tilfeldig, hvit støy er $R = \begin{cases} 0 & for\ \tau \neq 0 \\ \sigma^2 & for\ \tau = 0 \end{cases}$

Vi kan derfor ut fra autokovariansfunksjonen se hvor tilfeldig avviket er .
Jo nærmere $R_e(\tau)$ er 0 for $\tau \neq 0$, dess bedre er modellen vi har valgt.

e) Verdiene vi finner for parametrene er : $\hat{P} = [\ 0.1584 \ \ -0.9802\ ]^T$

Det gir $$h(z) = \frac{0.1584}{z - 0.9802} z^{-10}$$

Vi får da $$K = \frac{b}{a+1} = \frac{0.1584}{1 - 0.9802} = 8 \quad \text{og} \quad T = \frac{-0.01}{\ln(0.9802)} = 0.5$$

Systemet har en tidsforsinkelse på 10 tidsskritt : $\tau = 10 \cdot 0.01 = 0.1$

Systemets kontinuerlige transferfunksjon blir derfor: $$\underline{\underline{h(s) = \frac{8}{0.5s + 1} e^{-0.1s}}}$$

Oppgave 2 (25 %)

A. Kontinuerlig estimator med estimatorforsterkning K = [k_1 k_2]^T

A.1) $\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_1 + k_1 e$, $\dot{\hat{x}}_2 = -3\hat{x}_1 - 2.2\hat{x}_2 + u - 0.5v + k_2 e$ der $e = y - \hat{y} = y - 3\hat{x}_1$

A.2) Estimatoren bør være 2 – 4 ganger raskere enn prosessen. Av sprangresponsen : prosessens responstid er ca 1, dvs. prosessens knekkfr. $\omega_{p0} \approx 1$. Altså er $\omega_0 = 4$ et fornuftig valg.

A.3) Estimatorens systemmatrise :

$$A_e = A - KD = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} [\,3 \quad 0\,] = \begin{bmatrix} -3k_1 & 1 \\ -3-3k_2 & -2.2 \end{bmatrix}$$

A.4) Estimatorens karakteristiske polynom : det [sI - A_e] = 0

$$\det \begin{bmatrix} s+3k_1 & -1 \\ 3(1+k_2) & s+2.2 \end{bmatrix} = (s+3k_1)(s+2.2)+3(1+k_2) = s^2+(2.2+3k_1)s+6.6k_1+3k_2+3 = 0$$

2.ordens Butterworthpolynom : $\left(\frac{s}{4}\right)^2 + \sqrt{2}\,\frac{s}{4} + 1 = 0$

eller : $s^2 + 4\sqrt{2}\,s + 16 = 0$

Da må : $2.2+3k_1 = 4\sqrt{2}$ og $6.6k_1 + 3k_2 + 3 = 16$

➔ $k_1 = (4\sqrt{2} - 2.2)/3 = \underline{\underline{1.15}}$ og $k_2 = (13 - 6.6k_1)/3 = \underline{\underline{1.8}}$

B. Diskret prediktor-korrektor type estimator med samplingstid T_s = 0.1

B.1) $x(k+1) = T_s\dot{x}(k) + x(k) = [I+T_sA]x(k) + T_sBu(k) + T_sCv(k)$

$y(k) = Dx(k)$

Transisjonsmatrise, $\Phi = [I+0.1A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0.1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2.2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.3 & 0.78 \end{bmatrix}}}$

Diskret pådragsmatrise, $\Gamma = 0.1B = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}}}$

Diskret forstyrrelsesmatrise, $\Omega = 0.1C = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ -0.05 \end{bmatrix}}}$

Diskret målematrise, D = $\underline{\underline{[\,3 \;\; 0\,]}}$

B.2) Likhet : Kalmanfilteret har samme struktur som en prediktor-korrektor type estimator.

Forskjell: I Kalmanfilteret anses Prosess-støy og målestøy å være tilfeldig med middelverdi lik 0 og legges ikke til i estimatoren. Estimatorforsterkningen bestemmes slik at estimatoren blir optimal med tanke på prosess-støy og målestøy